EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 5
januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-130785.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 200,—, $^1/_2$ pag. *f* 110,— en $^1/_4$ pag. *f* 60,—.

Kriteria voor de ordening van de leerstof

Drs. J. VAN DORMOLEN

Oegstgeest.

Inhoud

Literatuur

R.R. Skemp, Psychology of learning mathematics. (Pelican) Aanbevolen! Speciaal geschreven voor leraren, die wel iets van wiskunde-onderwijs weten, maar een volstrekte leek zijn in de (leer-)psychologie. Geen vakjargon!

J.P. de Cecco, Psychology of learning and instruction. Hoofdstukken 10 en 11. (Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey). Een echt leerboek voor leraren. Ook hier heldere, voor leken goed leesbare taal. Niet speciaal voor het wiskunde-onderwijs.

Als we spreken over ordening van de leerstof doelen we niet op het feit, dat het voor het leren van stelling C onvermijdelijk is, dat men eerst definitie A en stelling B kent. Zoals het bijvoorbeeld voor de stelling van Pythagoras nodig is, dat men weet wat een rechthoekige driehoek is, dat men kan kwadrateren, optellen, aftrekken en worteltrekken en dat men enigermate met variabelen kan werken. In dergelijke situaties spreken we over *keuze* van leerstof. Kriteria hiervoor worden nu niet besproken.
We nemen aan, dat de keuze voor het leren van bepaalde begrippen en principes al gemaakt is.
Dit artikel gaat over de manier waarop het leren van die nieuwe begrippen en principes doelmatig plaats vindt en wat voor konsekwenties dat heeft voor het geven van onderwijs.
We bespreken dus niet wat er aan leerstof aan stelling C vooraf moet gaan, maar over de manier waarop informatie over stelling C het beste geordend kan worden.

Daarbij aannemend, dat de noodzakelijke voorkennis al aanwezig is.
Nog anders gezegd: Dit hoofdstuk behandelt kriteria voor de ordening van leersituaties binnen één bepaald leerstofgebied.
Het zou misschien duidelijker zijn te spreken over ordening van onderwijsleersituaties, dan over ordening van leerstof.

1 Het leren van begrippen

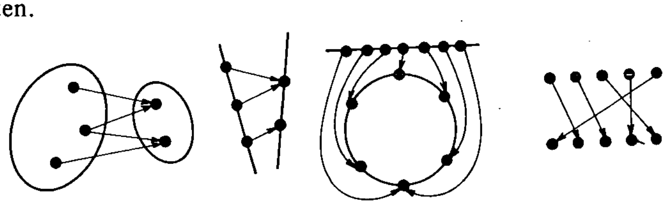
Een begrip wordt ondubbelzinnig vastgelegd door een definitie. Maar dat is meestal niet de manier waarop iemand dat begrip leert kennen. Deze paragraaf gaat over de manier waarop dat dan wel gebeurt. Stel voor, dat iemand het begrip rechthoekige driehoek niet kent, en dat we hem dat willen leren. We nemen aan dat hij weet wat een driehoek is. Dat wil niet zeggen, dat hij een definitie van een driehoek kan geven, maar dat hij voorbeelden van driehoeken kan geven en dat hij uit een aantal figuren de driehoeken kan aanwijzen.
We zouden hem nu kunnen mededelen, dat een rechthoekige driehoek een driehoek is, waarvan een hoek recht is. Maar daar zou hij niet erg mee geholpen zijn. Hij zou er veel meer mee gebaat zijn als wij een aantal figuren voor hem tekenden en telkens bij elke figuur zouden zeggen: 'Dit is een rechthoekige driehoek', of: 'Dit is niet een rechthoekige driehoek'.
Na een aantal voorbeelden zouden wij weer een figuur kunnen tekenen en hem vragen of dat wel of niet een rechthoekige driehoek is. Als we voldoende voorbeelden hadden gegeven, dan zou hij goed antwoorden. Hij zou het begrip rechthoekige driehoek kennen.
Daarna zouden we hem vragen uit te leggen waarom hij het goede antwoord gaf. Op zo'n manier zouden wij hem er toe kunnen brengen zelf een definitie van een rechthoekige driehoek te geven.
Tenslotte zou hij de gelegenheid krijgen zich de pas verworven kennis eigen te maken door opgaven te maken als:
(1) Teken een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekzijden 4 cm en 6 cm zijn.
(2) Als een van de hoeken van een rechthoekige driehoek 26 graden is, hoe groot zijn dan de andere hoeken?
(3) Beredeneer, dat een rechthoekige driehoek geen stompe hoeken kan hebben.

Bij het bovenstaande voorbeeld passen drie opmerkingen.
De drie opgaven zijn bedoeld om de lezer een indruk te geven van het soort problemen, dat we zouden willen geven. We zouden ze niet op deze manier aan de leerlingen willen aanbieden. Bovendien zullen dit zeker niet de eerste drie opdrachten zijn. Tussen de eerste en de derde behoren veel meer oefeningen.
Ten tweede hebben wij in het gegeven voorbeeld niet aangegeven dat de leerlingen ook hadden moeten leren wat rechthoekszijden zijn, omdat ze anders de eerste opgave niet zouden kunnen maken. Dat zou op dezelfde manier moeten gebeuren als het begrip rechthoekige driehoek, door middel van voorbeelden en aanwijzen. We zouden hem ook hier er toe kunnen brengen zelf het begrip te definiëren.

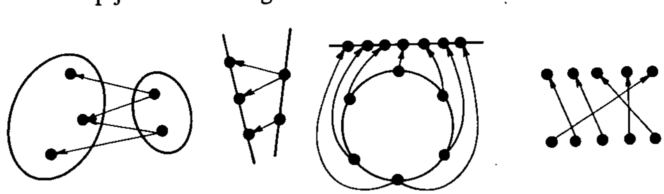
In de derde plaats is het duidelijk dat het voor het goed kunnen maken van de opgaven, niet noodzakelijk was de rechthoekige driehoek te definiëren. De leerlingen zouden het begrip kennen zonder de definitie.

In het voorbeeld zijn diverse leersituaties te onderkennen.
Eerst is er een *oriëntatie* op het te leren begrip. De leerlingen krijgen informatie over wat ze te leren zullen krijgen ('We gaan een bijzonder soort driehoek bespreken'), relevante kennis wordt opgeroepen ('Wie kan er geen voorbeeld geven van een driehoek? Wat weet je van de hoeken van een driehoek? Wijs in deze driehoek de hoeken eens aan. En de zijden. Wat is een rechte hoek? Hoe zouden we hoeken kunnen noemen, die niet recht zijn? '). Ook het lezen van de titels van hoofdstuk en paragraaf hoort bij de oriëntering.
Vervolgens worden alle te geven voorbeelden *gesorteerd* in twee groepen. Er komt een groep figuren, die rechthoekige driehoek genoemd worden en een andere groep figuren, die die namen niet dragen. Daarmee bereiken we, dat de leerlingen los komen van bepaalde voorbeelden. Rechthoekige driehoek is niet langer de naam van een bepaalde figuur, maar van oneindig veel figuren. De leerling heeft de kenmerkende eigenschap *geabstraheerd.*
Zijn begintoestand is drastisch veranderd. Dat blijkt doordat hij nu van nieuwe figuren kan zeggen of het rechthoekige driehoeken zijn of niet. Soms kan hij zelf een nieuw voorbeeld geven. Dit laatste behoeft niet altijd het geval te zijn. Het bereiken van de abstractie betekent niet, dat hij het nieuwe begrip ook kan *expliciteren.* Dit nauwkeurig kunnen formuleren is een volgende stap in het leerproces. Soms kan deze stap overgeslagen worden. Als het begrip wat ingewikkeld is, is het vaak beter eerst een volgende fase aan te pakken.
Die volgende fase is nodig om het nieuwe begrip te *verwerken,* zodanig dat de leerlingen het zullen onthouden en toepassen.

Hier volgt een ander voorbeeld.
We willen leerlingen leren wat een inverse functie is. Daarvoor worden zij eerst herinnerd aan functies. Er zal van hen gevraagd worden voorbeelden te geven van functies en van relaties, die geen functie zijn. Pijlendiagrammen doen hierbij goede diensten.



We kunnen de pijlen in het diagram omkeren.



De vraag is of het zo verkregen plaatje dan nog wel een functie voorstelt.
De leerlingen krijgen nu een aantal voorbeelden van functies te zien. Bij elk van die functies moeten zij zeggen of bij een gegeven beeld het origineel terug te vinden is. Is dat het geval, dan heet zo'n functie omkeerbaar. En de functie die door omkering is verkregen heet de inverse van de oorspronkelijke. Het zal niet lang duren of de leerlingen zijn in staat van niet te ingewikkelde functies te zeggen of ze een inverse hebben of niet.
Daarna moeten zij gaan formuleren wat een omkeerbare, en wat een inverse functie is. Dat kan met woorden, of met formules, maar het is wel de bedoeling, dat de formulering zodanig is, dat zij er mee verder kunnen. Dus geen definitie, die in het vervolg niet gebruikt zal worden.
Dat vervolg bestaat uit het maken van oefeningen om het zojuist geleerde te verwerken en op de lange duur uit het leren van nieuwe informatie.
Opmerking: In beide voorbeelden hebben we in het midden gelaten hoe de communicatie plaats vindt. Het kan zijn, dat de leerlingen een gedeelte van de informatie schriftelijk krijgen, het kan zijn dat alleen de leraar die informatie geeft, enzovoort.
Dat is op het moment niet van belang. Hoofdzaak is, dat de leerlingen relevante informatie en leeropdrachten krijgen.
In dit voorbeeld is eenzelfde ordening van de leerstappen te zien. Eerst een oriëntatie, waarin de leerlingen geïnformeerd worden over het doel van de les, relevante kennis opgeroepen en het probleem gepresenteerd wordt.
Daarna een sorteerfase, waarbij de leerlingen de voorbeelden moeten classificeren. In dit geval is het kenmerk van buiten af gekomen, terwijl dat in het voorbeeld van de rechthoekige driehoek door de leerlingen zelf moest worden ontdekt. Dit laatste is in het geval van de omkeerbare functies ook wel mogelijk, maar dan zal het aantal duidelijke, eenvoudige doelgerichte voorbeelden groter moeten zijn. Door het classificeren komen de leerlingen tot een abstractie, waardoor zij nieuwe voorbeelden kunnen herkennen.
Deze abstractie wordt geëxpliciteerd, door een omschrijving met behulp van taal of andere symbolen. Dat noemen we dan definiëren.
Tenslotte wordt de verkregen kennis verwerkt in de vorm van opdrachten. Deze opdrachten kunnen zodanig gestructureerd zijn, dat ze niet alleen het geleerde consolideren, maar op zichzelf ook alweer voorbereiden op het volgende leerstofgebied. (Zoals bijvoorbeeld het aanleren van een algoritme om uit een omkeerbare rationale functie het functievoorschrift van de inverse af te leiden.)

Opmerking: Het kan zijn dat leerlingen al lang voorbereid zijn op het begrip inverse functie, doordat ze dat in het verleden bij vraagstukken al ontmoet hebben zonder dat er nadrukkelijk op is gewezen.

2 Classificeren en abstraheren

De gang van zaken, zoals die in beide voorbeelden is beschreven berust op de theorie, dat mensen een nieuw begrip niet leren kennen door middel van defini-

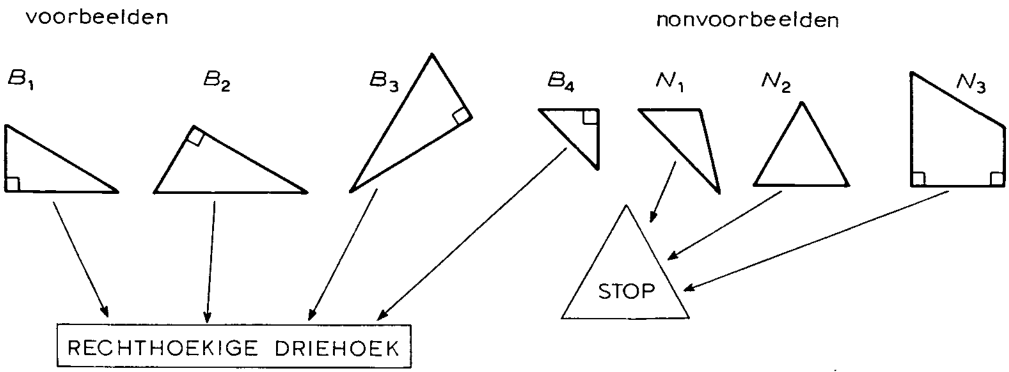
ties, maar door het sorteren van voorbeelden en non-voorbeelden. Dit sorteren gebeurt aan de hand van een classificatievoorschrift, dat hen al of niet van buiten is opgelegd.
In onze directe dagelijkse omgeving leren wij gewoonlijk sorteren zonder een van buiten opgelegd classificatievoorschrift: 'Dat is rood, dat is ook rood en dat is niet rood', 'Dat is een hondje, en daar is ook een hondje. Nee, dat is geen hondje, dat is een poes'. 'Kijk daar vliegt een helicopter, en daar nog een. Daar vliegt geen helicopter, dat is een gewoon vliegtuig'.
Ook in het onderwijs is dit een normale gang van zaken. De aardrijkskundeleraar kan op de globe eerst een aantal meridianen aanwijzen en daarna pas naar de kenmerkende eigenschap van meridianen vragen. En als iemand dan een verkeerd kenmerk noemt, kan hij een lijn aanwijzen, die wel aan dat genoemde kenmerk voldoet, maar geen meridiaan is en vragen of dat dan ook een meridiaan is.

Doordat iemand in de gegeven voorbeelden overeenkomsten en verschillen ontdekt (bewust of onbewust, dat doet er niet toe) zal hij op zeker moment los komen van de voorbeelden. Hij kent de klasse van objecten en is in staat van een nieuw voorbeeld te zeggen, dat het tot die klasse behoort en van een non-voorbeeld, dat het niet tot die klasse behoort. Meestal is hij ook in staat om zelf voorbeelden en non-voorbeelden van het begrip te geven. 'Wat is eerlijkheid? ', 'Dat is als je niet steelt'. 'Wat is een parallellogram? ' 'Dat is een ding dat er zo en zo uitziet'. 'Waarom kan je niet door nul delen? ', 'Dat kan niet, want anders zou je bijvoorbeeld bij zes gedeeld door nul krijgen, dat nul maal iets is zes'.

Dit loskomen van voorbeelden is abstraheren. Als iemand uit voorbeelden en non-voorbeelden door sorteren een begrip heeft geabstraheerd, dan zeggen we, dat hij het begrip kent. We hebben in het verleden meermalen meegemaakt, dat een leerling feilloos de definitie van een logaritme kon geven. We hadden dan de illusie, dat hij dat begrip dan ook kende, maar dan bleek dat hij niet in staat was te zeggen, dat $^{2}\log 16$ hetzelfde is als 4. Het is duidelijk, dat hij het begrip dus niet kende.
Het kriterium voor het kennen van een begrip (vermoedelijk moeten we in plaats van kennen liever het werkwoord 'hebben', in de betekenis van 'bezitten' gebruiken) is niet of iemand in staat is het te benoemen, of een definitie ervan kan geven, maar of hij zich zo gedraagt, dat hij in staat is gegevens op de vereiste manier te classificeren.

3 Het overdragen van begrippen

Stel dat we iemand een begrip B willen leren door middel van voorbeelden B_1, B_2, $B_3, \ldots, B_n$. Vrijwel altijd zijn $B_1, B_2, B_3 \ldots, B_n$ zelf ook weer begrippen.
We noemen nu B een begrip van hogere orde dan de begrippen $B_1, B_2, B_3 \ldots, B_n$ omdat we eerst deze voorbeelden moeten kennen, voordat we B kunnen leren kennen.
Dit kan worden toegelicht met het leren van het begrip rechthoekige driehoek.



Men moet de voorbeelden *her*kennen, anders is het leren van het nieuwe begrip onmogelijk.
We geven nu een uiterst belangrijk principe over het overdragen van begrippen. We nemen het over uit Skemp.
Begrippen van hogere orde dan die welke iemand al heeft, kunnen niet op hem overgedragen worden door middel van een definitie, maar alleen door hem in staat te stellen een voldoend aantal toepasselijke voorbeelden te classificeren. Omdat in de wiskunde deze voorbeelden bijna onveranderlijk andere begrippen zijn, moeten wij er eerst voor zorgen, dat de leerling deze begrippen al gevormd heeft.

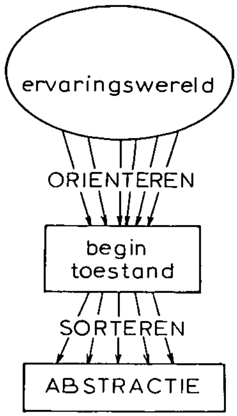
Het tweede gedeelte van dit principe heeft consequenties voor de leerstofkeuze. Zoals bij de inleiding is aangegeven wordt daarover in dit hoofdstuk niet gesproken.
Het eerste gedeelte wijst op de zinloosheid van het geven van definities, die nog geen betekenis voor de leerlingen hebben.
Het principe verklaart de eerste drie fasen uit het leerproces:

Oriënteren, waarin de leerlingen
a het leerdoel leren kennen;
b relevante kennis oproepen;
c door middel van een probleemstelling gemotiveerd worden het leerdoel na te streven.
Deze fase heeft dus ten doel de juiste begintoestand te bereiken. De probleemstelling gaat geleidelijk over in:

Sorteren, waarin de leerlingen in de vorm van voorbeelden, begrippen van lagere orde dan hetgeen dat hij moet leren onder ogen krijgt en moet classificeren. Dit classificeren gebeurt meestal met hulp van leraar en/of leerboek.
Het sorteren leidt tot

Abstractie, een toestand waarin de leerling het nieuwe begrip kent. Kenmerkend voor deze toestand is, dat leerlingen in staat zijn nieuwe gegevens zelfstandig te

classificeren. We kunnen toetsen of die toestand is bereikt door van de leerling te vragen nieuwe voorbeelden te herkennen en/of zelf nieuwe voorbeelden te geven.



Vraag: Heeft de schrijver van dit artikel zich zelf aan dit schema gehouden?

4 In welke gevallen kunnen of moeten we wel definities geven?

In het principe van Skemp werd tot uitdrukking gebracht, dat het ging om het leren kennen van begrippen van hogere orde, dan iemand op een bepaald moment bezit. Het komt ook voor dat we hem een begrip willen leren van lagere orde. In dat geval kunnen we ons heel goed van een definitie bedienen.

Wie bijvoorbeeld het begrip logaritme kent en het getal e, heeft geen moeite met de definitie: Onder een natuurlijke logaritme wordt verstaan een logaritme met grondtal e.
Wie weet wat een cirkel is, kan gemakkelijk begrijpen wat zijn leraar bedoelt, die zegt, dat een eenheidscirkel een cirkel met straal 1 is.
Wie het begrip deelverzameling kent zal geen moeite hebben met een formele definitie van een echte deelverzameling.

In dergelijke situaties is het blijkbaar niet nodig de leerling een sorteerfase te laten doorlopen. Vanzelfsprekend is het wel nodig om hem eerst op het nieuwe leerdoel te oriënteren. Maar hij kan vanuit de begintoestand direct in de abstractiefase komen. Toch is er ook hier zowel bij leraren als leerlingen een behoefte om voorbeelden te geven. Men kan dat verklaren uit de behoefte, die beide hebben om te controleren of de leerling ook werkelijk de vereiste abstractie heeft bereikt.
Beide partijen moeten zich die behoefte leren realiseren, zodat controleren een activiteit wordt, die systematisch uitgevoerd wordt bij elk nieuw te leren begrip, en niet alleen als men daar toevallig de behoefte toe voelt.

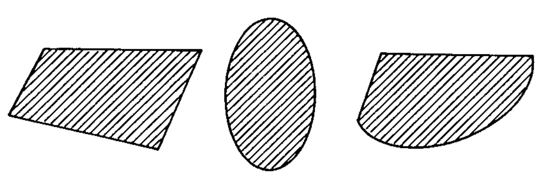
Dit was het enige geval waarbij men iemand een begrip kan leren door middel van een definitie.

Er is nog een andere reden waarom mensen een begrip definiëren. Die is van veel principiëler aard dan het voorgaande. In veel situaties is het geven van een definitie overbodig, omdat we met voorbeelden uit onze directe omgeving duidelijk kunnen maken wat we bedoelen. Er is geen sprake van een hiërarchische ordening van begrippen. Het begrip boom heeft niets te maken met het begrip huis, en deze beide hebben weer niets te maken met het begrip dromedaris. In de aardrijkskunde is het mogelijk Afrika te behandelen, zonder dat men Europa heeft gehad. Men kan in het onderwijs in het Frans de passé simple betrekkelijk onafhankelijk van de futur leren. De reden dat velen wiskunde zo moeilijk vinden is, dat daarbij veel minder sprake is van die onafhankelijkheid van begrippen. Elk nieuw begrip is weer van hogere orde dan voorgaande begrippen. Steeds doet men een stapje omhoog. Wie onderweg iets niet goed heeft begrepen loopt het risico alle volgende stappen niet te kunnen begrijpen. In zijn pogingen om het onderwijs toch bij te houden neemt hij zijn toevlucht tot uit het hoofd geleerde feiten en trucs. Hij verliest het overzicht en het vak wordt alleen maar een bedreiging voor het niet slagen voor overgang of eindexamen.
De moeilijkheid bij het leren van begrippen in de wiskunde is, dat het vaak abstracties zijn, die steunen op abstracties, die op hun beurt weer met abstracties duidelijk gemaakt moeten worden, enz., enz. Wie een begrip wil overdragen en daarvoor toepasselijke voorbeelden wil geven, moet zeker weten, dat hij en zijn gesprekspartner die voorbeelden op precies dezelfde manier zullen interpreteren. Anders loopt men het risico reacties te krijgen als: 'U spreekt over rechthoeken, maar u heeft daar een vierkant getekend', of men krijgt hele discussies over de vraag of de verzameling (x, y) met $x^2 + y^2 = 0$ nu wel of geen cirkel is.
Het kan ook voorkomen dat men problemen, zoals bewijzen of berekening, alleen maar goed kan oplossen als de gegeven begrippen zorgvuldig zijn gedefinieerd.

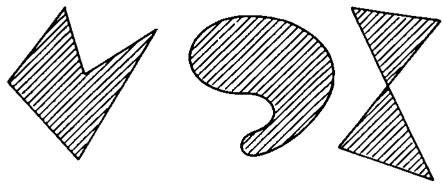
Het blijkt dus nodig te zijn van sommige begrippen een definitie te geven, teneinde nieuwe abstracties van hoger orde te kunnen bereiken en problemen op te lossen. In zulke gevallen moet er na de fase van de abstractie een fase komen, die we noemen:

Expliciteren

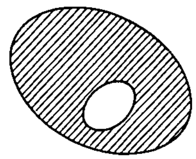
In deze fase wordt door woorden en/of andere symbolen het nieuwe begrip ondubbelzinnig vastgelegd.
Er is nog wel een andere reden waarom expliciteren nuttig kan zijn. Vaak wordt iemand zich door die activiteit pas goed bewust van wat hij geleerd heeft. Hij kent het begrip weliswaar in abstractie, zodat hij voorbeelden kan herkennen, maar als er afwijkingen zijn verkeert hij in het onzekere.
'Deze figuren noemt men convex.



Deze figuren zijn niet convex.



Is de volgende figuur convex? '



Antwoord: 'Ja, want er zit geen deuk in' (De leerling heeft blijkbaar uit zichzelf al behoefte aan expliciteren).

'Waarom denk je dat de functie $x \to |x^3|$ niet differentieerbaar is in 0? '
Antwoord: 'Ik dacht dat het nooit kon als er absoluutstrepen omheen staan.' (Weer duidelijk behoefte aan expliciteren. Blijkbaar is de goede definitie van differentieerbaarheid niet voldoende verwerkt.)

'$-x^2$ kan toch nooit een negatief getal zijn! Er staat een kwadraat en het kwadraat van een negatief getal is niet negatief.'

Uit deze voorbeelden blijkt niet alleen hoe belangrijk het is, dat men bij het leren van nieuwe begrippen doelmatige voorbeelden geeft, maar ook dat het belangrijk kan zijn, dat leerlingen zich door middel van symbolen (gesproken en geschreven woorden zijn ook symbolen) bewust maakt waar het over gaat.

5 Onthouden en toepassen

Wie een nieuw begrip heeft geleerd heeft dat gedaan om het later te kunnen gebruiken. Daarom is het van belang, dat hij de nieuw verworven kennis ook onthoudt. Een hulpmiddel daarvoor is hem voldoende toepasselijke oefeningen te geven, waarin hij het geleerde toepast, inoefent, integreert in een ruimere context, consolideert. Deze fase van het leerproces noemen we *verwerken.*

6 Samenvatting

Het leren van begrippen van hoger orde, dan iemand bezit, kan niet gebeuren door middel van een definitie, maar alleen door hem (bewust of onbewust) een aantal

toepasselijke voorbeelden te laten classificeren. Daarvoor is nodig, dat hij die voorbeelden, die meestal zelf ook weer begrippen zijn, kent. Vaak is het nuttig, dat hij het nieuwe begrip, dat hij heeft leren kennen, ook kan definiëren, omdat er anders later communicatiestoornissen optreden en omdat hij anders zelf niet verder kan komen. Het geleerde moet hij ook onthouden, om het te kunnen toepassen op problemen en om later weer nieuwe begrippen te leren. Een en ander heeft geleid tot een schematische voorstelling van de ordening van onderwijsleer-situaties:

Oriënteren
a doel van de les leren kennen
b relevante schema oproepen
c probleem stellen

↓

Sorteren
classificatie van voorbeelden op basis van overeenkomsten en verschillen

↓

Abstractie
herkennen van nieuw voorbeeld en/of zelf nieuw voorbeeld geven

↓

Expliciteren
door middel van taal- en andere symbolen ondubbelzinnig vastleggen.

↓

Verwerken
oefenen om het nieuwe te consolideren en voorbereiding op toepassen ervan op problemen en leren van nieuwe begrippen

Hierbij zijn een paar kanttekeningen te maken. Bovenstaande schematische voorstelling is een schematische voorstelling.
Met alle voordelen, maar ook alle nadelen van dien.
Dat betekent, dat in de praktijk afwijkingen kunnen voorkomen. Zo is het mogelijk, dat de fase van het expliciteren (voorlopig) overgeslagen wordt.
Ook kunnen de eerste drie fasen zo geleidelijk in elkaar overgaan, dat ze nauwelijks los van elkaar te herkennen zijn. Soms is slechts één voorbeeld voldoende. Dit is vooral het geval als iemand een begrip is vergeten. Het is dan meestal niet goed hem de definitie nog eens te laten opzeggen of, als hij die vergeten is, hem die definitie te geven. Veel beter is het in sneltreinvaart het hele proces weer even te laten doorlopen:

Oriënteren: 'Wat wou je nu eigenlijk weten? '
'Ik ben vergeten wat kruisende lijnen zijn, en dat heb ik nodig in dit vraagstuk'.

Sorteren: 'Zijn dit kruisende lijnen? ' (Leraar houdt een paar potloden in de lucht)
'Ja.'
'En dat? ' (Idem)
'Nee, dat zijn evenwijdige lijnen . . .'

Abstractie: '. . . O, ja, ik weet het alweer.'

Expliciteren: 'Zeg het eens.'
'Kruisende lijnen zijn lijnen, die niet in een vlak liggen.'

Verwerken: 'Goed, ga nu verder met het vraagstuk.'

Dit verzonnen, maar realistische voorbeeld geeft aan hoe een leerling te helpen is als hij iets vergeten is. Er blijkt echter een sterke afhankelijkheid van de leraar uit. Wie zijn leerlingen wil leren zelfstandig problemen op te lossen (dus ook het probleem van het terugvinden van vergeten definities) moet het liever op een andere manier doen, die lijkt op de nu volgende discussie.
Merk daarbij op, dat het nu niet meer gaat om de definitie van kruisende lijnen, maar om de omschrijving van een manier om vergeten definities van bekende begrippen terug te vinden.

Oriënteren: 'Wat wou je nu eigenlijk weten? '
'Ik ben vergeten wat kruisende lijnen zijn, en dat heb ik nodig in dit vraagstuk.'

Sorteren: 'Wat zou je in dit soort situaties ook alweer kunnen doen? '
'Opzoeken in het boek, maar dat heb ik niet bij me.'
'En ik wil het je niet zeggen. Wat is er nog meer voor mogelijkheid? '
'Zelf voorbeelden verzinnen.'
'Doe dat dan.'
(Leerling beweegt wat met potloden in de lucht, maar komt er blijkbaar niet uit.)
'Je kunt ook nog wel op een andere manier op het spoor komen.'

Abstractie: 'Door non-voorbeelden te verzinnen.'
'Wat bedoel je daarmee? ' (Poging om leerling tot expliciteren te brengen.)
'Als ik het met kruisende lijnen niet kan, dan kan ik het proberen met niet-kruisende.'
(Expliciteren mislukt, want er komt een voorbeeld van de methode. Niet een omschrijving van de methode zelf).

Verwerken: 'Probeer dat dan maar eens.' (De leraar dringt niet verder aan, om de leerling niet te ver van het oorspronkelijke probleem te laten afdwalen. Hij neemt zich echter voor, om als het vraagstuk opgelost is, nog even over de methode in het algemeen te spreken, teneinde alsnog tot expliciteren te komen.)

Vraag. Bedenk een begrip, dat in het voortgezet onderwijs onderwezen wordt.

Neem drie verschillende schoolboeken en ga na hoe dat begrip in elk geïntroduceerd wordt. Probeer daarbij de verschillende fasen uit het leerproces te herkennen. Wat zou u doen, als u een van die boeken gebruikt en een of meer van de fasen ontbreekt?
Herhaal deze oefening enige malen.

Vraag. Hoe zou u iemand duidelijk maken wat het verschil is tussen een stelling en een definitie?

7 Ruis

Door de voorbeelden in de sorteerfase niet goed te kiezen, kan men leerlingen volstrekt irrelevante informatie geven. Daardoor komen zij op een dwaalspoor of op geen enkel spoor. Dergelijke storende informatie heet ruis.

Wie een jong kind het begrip drie wil leren, moet niet aan komen dragen met voorbeelden van drie appels, drie kersen en drie ballen. Alle objecten zijn rond. Het rond zijn zou wel eens belangrijke ruis kunnen worden.

Bij het leren van het begrip rechthoekige driehoek moeten, zeker bij de eerste voorbeelden, de rechthoekszijden duidelijk verschillende lengte hebben. Anders zou als ruis kunnen optreden, dat een rechthoekige driehoek een half vierkant is. Bij de non-voorbeelden horen niet alleen driehoeken, die niet rechthoekig zijn, maar ook rechthoekige figuren, die niet driehoek zijn.
De eigenschap, dat drie hoogtelijnen door een punt gaan, moet niet worden gedemonstreerd met een (bijna) gelijkbenige driehoek.

Gemakshalve zullen we het ontbreken van relevante informatie ook ruis noemen. Wie bijvoorbeeld wil toetsen of het begrip vierkantswortel goed is begrepen, kan dat niet doen door te vragen $\sqrt{3^2}$ te vereenvoudigen. Het gevaar is groot, dat de leerling er eerst $\sqrt{9}$ van maakt en daarna 3, omdat hij weet, dat $\sqrt{9}$ en 3 hetzelfde zijn. Beter is het hem te vragen naar $\sqrt{37^2}$ of $\sqrt{83{,}5^2}$. In het eerste geval ontbreekt de informatie, dat het er vermoedelijk niet toe doet wat het grondtal voor getal is.
We hebben meermalen meegemaakt, dat een leerling niet begreep wat recht evenredig is als we de evenredigheidsfaktor 2 of 3 gebruikten, maar wel als we daarvoor 17 of 5,9 namen.

Het gaat er dus om in de te geven voorbeelden bepaalde attributen onbelangrijk te maken (de lengte van de zijden bij rechthoekige driehoeken) en andere te versterken (geen zogenaamd eenvoudige getallen, maar juist schijnbaar ingewikkelde opdat het attribuut 'het doet er niet toe welk getal je neemt' benadrukt wordt).
De leraar, die bij het onderwijzen van een nieuw begrip, het niet kan nalaten uit te wijden over een interessant detail, levert gevaarlijk veel ruis.

Een en ander wil niet zeggen, dat we onze leerlingen altijd zo veel mogelijk ruis moeten besparen. Zij moeten wel degelijk leren relevante van onbelangrijke informatie te scheiden. Maar dat gebeurt als zij leren verworven kennis toe te passen op het oplossen van nieuwe problemen. Niet bij het aanleren van die kennis zelf.

8 Het overdragen van principes, methoden, algoritmen

Wat in het voorgaande is gezegd over het overdragen van begrippen, geldt ook voor het onderwijzen van stellingen, van structuren, van algoritmen, van werkmethoden. Dat is duidelijk als men bedenkt, dat het daarbij niet gaat om afzonderlijke begrippen, maar om relaties tussen twee of meer begrippen. Zoiets kan men misschien niet meer een begrip noemen, maar het is wel iets van hogere orde dan de onderliggende begrippen.
We zullen het proces dus ook toepassen als we iemand de distributieve eigenschap willen leren, of een methode om vierkantswortels uit getallen te berekenen, of de manier waarop het bewijs van een stelling opgeschreven moet worden, of de structuur van een commutatieve groep.
Hier volgen een paar voorbeelden.

A Doel van de les: Het kennen en formuleren van de stelling: Voor elk geheel positief getal *n*, en voor elk negatief getal *a* geldt: als *n* oneven is, dan is a^n een negatief getal en als *n* even is, dan is a^n een positief getal. (De formulering hoeft niet identiek te zijn aan deze zin.) Voorbeelden van deze stelling kunnen geven. Door voorbeelden kunnen laten zien, dat de gestelde voorwaarde '*a* negatief' nodig is voor het eventueel negatief zijn van a^n.
Beschrijving begintoestand: Brugklasleerlingen, die eigenschappen van machten met positieve gehele exponent en positief grondtal kennen en kunnen gebruiken.
Opmerking: In het hieronder beschreven proces worden opdrachten en informatie gegeven door L. Dit kan een leraar zijn, maar ook een werkboek (of beide).

Orientatie
L vraagt vereenvoudigen van symbolen als 8^1, 3^4, 2^5, $(1\frac{1}{2})^3$. Deze vragen dwingen tot het herformuleren van de betekenis van dergelijke symbolen. Door de herhaling van deze relevante leerstof weet de leerling dat de nieuwe leerstof over machten zal gaan. Zijsprongen als $3^3 . 3^5$ en $(3^3)^5$ zijn niet relevant en moeten daarom worden vermeden (Ruis!). Wel relevant is de opmerking dat 8^1, 3^4, 2^5 en $(1\frac{1}{2})^3$ symbolen zijn voor positieve getallen.
Leerlingen zullen dit niet relevant vinden. Daarom moet L hierop direkt aansluiten met een vraag naar de betekenis van en een andere naam voor $(-8)^1$, $(-3)^4$, $(-2)^5$ en $(-1\frac{1}{2})^3$. Nu weten de leerlingen dat het zal gaan over machten met negatief grondtal. L deelt mee, dat onderzocht zal worden of dergelijke machten negatief of positief zijn.
Deze fase hoeft niet langer dan vijf minuten te duren.

Sorteren

L draagt leerling op achtereenvolgens te vereenvoudigen:

$$(-3)^1, (-3)^2, (-3)^3, (-3)^4, (-3)^5, (-3)^6, (-3)^7$$

en vervolgens deze getallen te sorteren op positieve en op negatieve getallen. Hetzelfde voor

$$(-2)^1, (-2)^2 \ldots\ldots\ldots, (-2)^{10},$$

voor

$$(+2)^1, (+2)^2, \ldots\ldots\ldots, (+2)^{10}, \text{(non-voorbeeld)}$$

en voor

$$(-1)^1, (-1)^2, \ldots\ldots\ldots, (-1)^{12}.$$

Deze fase zal ongeveer 10 minuten duren.

Abstractie

Als alles goed gaat is het sorteren geleidelijk vervangen door deze fase omdat de leerlingen het regelmatige patroon gezien hebben. Zij moeten nu kunnen antwoorden op vragen naar de vereenvoudiging van $(-1)^{1000}$, $(-1)^{9834}$, en naar de signatuur van $(-2)^{83}$, $(-8)^{624}$, $(-5)^{837}$.
Deze voorspellingen moeten gemotiveerd kunnen worden. Duur van deze fase: vijf tot tien minuten.

Expliciteren

De leerlingen moeten nu een algemene regel opstellen. Dit is het hoofddoel van de les. De les moet zo geprogrammeerd zijn, dat de leerlingen deze fase ook als climax ervaren. Duur van deze fase: **maximaal** 5 minuten.

Verwerken

Deze fase bestaat uit twee delen. Ten eerste de controle van de stelling. Er moet een redenering gegeven worden waarin kwantificatie van de variabelen plaats vindt. Dit zal vrijwel gelijk opgaan met de voorgaande fase.
Ten tweede de controle van de leerlingen. Zij moeten opgaven maken waarin afwisselend positieve en negatieve grondtallen gegeven worden. Zij moeten de waarheid of onwaarheid onderzoeken van beweringen als $(-2)^7 = -2^7$, $(-5)^{100} = -5^{100}$. Dit zal wel moeilijkheden opleveren. Gewoonlijk zal een zijsprong gemaakt moeten worden in de vorm van een mini-proces over de betekenis van $(-a)^n$ en $-a^n$. Ook in dit miniproces moeten de verschillende fasen herkenbaar zijn. Het zal evenwel snel moeten gebeuren omdat het hier een herhaling betreft en omdat anders de aandacht teveel van het centrale doel wordt afgeleid. Deze fase duurt tot het eind van de les en wordt zo nodig nog verlengd met een huiswerkperiode.

Opmerkingen: In een les over bovengenoemd onderwerp maakte de leraar na de hier beschreven abstractiefase een zijsprong en ging het probleem nog eens volgens een andere strategie benaderen: Als in een produkt een oneven aantal factoren

vervangen wordt door hun tegengestelde, dan wordt het produkt vervangen door zijn tegengestelde. Ook hier was de ordening van het leerproces duidelijk te zien. Vervolgens wilde hij van beide processen de explicitering laten ineenvloeien. Halverwege het tweede proces werd de klas onrustig, sommige leerlingen werden lastig en de leraar schakelde onbewust over van een intensief vraag- en antwoordspel naar een doceerles.
De explicitering was verward en vele leerlingen bleken de draad kwijt geraakt te zijn. De conclusie is duidelijk. Na de abstractie van het eerste proces had hij eerst verder moeten gaan. Nu werden twee problemen vermengd.

B Doel van de les: Formuleren van een definitie van een logaritme (en deze definitie kunnen gebruiken).
Beschrijving beginsituatie: Derde klassen van een gymnasium, derde trimester. Leerlingen weten wat rationale en irrationale getallen zijn. Zij kennen functies, origineelverzameling, beeldverzameling, machten met positieve gehele exponenten en stellingen daarover.

Opmerking: Er is gekozen voor de strategie de logaritme te beschouwen als een omkeerbare functie van $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$. Daardoor zal de definitie niet de gebruikelijke zijn, maar:
Onder de logaritme met grondtal a ($a > 0, a \neq 1$) verstaat men de functie die elk getal $b \in \mathbb{R}^+$ afbeeldt op een getal c en wel zodanig, dat $a^c = b$.

Oriënteren

Berekening van 3125 · 15625 en van 16384 · 2048. Hier wordt het probleem gesteld: Kan het ook vlugger? Doel van de komende lessen is functies te leren kennen, die o.a. op deze vraag antwoorden.

Sorteren

Deze vraag moet leiden tot het ontbinden in factoren van beide produkten en daarmee tot de conclusie dat men een tabel van machten van 5 en van machten van 2 nodig heeft om snel antwoord te kunnen geven. Desgevraagd wordt deze door L geleverd.

Abstractie

Formuleren van een functie die elke macht van 2 afbeeldt op zijn exponent (${}^2\log$).
Ontdekken van de belangrijkste eigenschap:

$$\underset{x \in \mathbb{Z}}{\forall} \; \underset{y \in \mathbb{Z}}{\forall} \quad {}^2\log(2^x \cdot 2^y) = {}^2\log 2^x + {}^2\log 2^y$$

Dit resultaat evalueren door het opgeven van vraagstukken en door vragen naar de definitie van

$${}^5\log \text{ en van } {}^{1\frac{3}{4}}\log.$$

Expliciteren

Definitie van $^a\log$. Onderzoek naar toelaatbare waarden van a en naar de originelenverzameling.

Verwerken

Gemengde opgaven, die alle rechtstreeks met de definitie kunnen worden opgelost.

Opmerkingen: In deze les moet de verleiding weerstaan worden onderwerpen ter sprake te brengen die niet relevant zijn, zoals de omkeerbaarheid van de functie, eigenschappen van zijn inverse, definieerbaarheid op een grotere originelenverzameling. Dit zijn allemaal onderwerpen voor latere lessen. Suggesties van leerlingen in deze richting mogen echter niet al te abrupt afgekapt worden.
In de abstractiefase zal ook een miniprocesje nodig zijn om tot de daar beschreven formuleringen te komen.
C Opgave: Voor welke waarden van p raken alle lijnen van het stelsel $x + ky + \frac{1}{2}k^2 = 0$ aan de parabool $y^2 = 2px$?
Situatiebeschrijving: vijfde klasse HBS, eerste trimester; leerlingen kennen de analytische behandeling van parabool, rechte lijn, raaklijn aan parabool. Stelsels van lijnen zijn niet of zeer summier behandeld.

Oriënteren

De leerling leest de opdracht. Probeert te begrijpen wat er staat. Deze fase gaat geleidelijk over in de volgende.

Sorteren

De leerling doet aan 'zinsontleding' en probeert de belangrijkste elementen uit de zin te lichten. Deze zijn:
a Voor welke waarden van p
b raken aan
c alle lijnen
d het stelsel $x^2 + ky + \frac{1}{2}k^2 = 0$
e de parabool $y^2 = 2px$
Opmerking: Dit sorteren moet de meeste leerlingen worden geleerd. Slechts weinigen doen het intuïtief. (Van hen zegt men dan dat ze een wiskundeknobbel hebben).
Ad a): De leerling moet begrijpen dat p een parameter is en de betekenis van dat woord kennen. Hij moet ondervinden dat je bij verschillende getallen voor p een verschillende situatie krijgt. Hij moet een voorbeeld kiezen. Mogelijk meerdere voorbeelden. Het kiezen van een voorbeeld wordt gewoonlijk gedaan door het tekenen van een parabool. Veel leerlingen weten niet, dat ze daarmee een waarde voor p gesubstitueerd hebben. Ook dat is iets waar zij bewust van gemaakt moeten worden. Het is overigens de vraag of het goede voorbeeld gekozen is (Ruis). In elk geval helpt het kiezen van een voorbeeld de overgang naar de abstractiefase.

Ad b): De leerling moet weten wat hieronder wordt verstaan. Hij moet de verschillende methoden die er bestaan voor het bewijs van het raken van een lijn aan een parabool in zijn herinnering oproepen.
Ad c): Als de leerling (d) begrijpt zijn hier geen problemen. Wat hij moet gaan beseffen, is dat het bewijs geleverd moet worden voor elke k.
Ad d): Dit geeft de meeste problemen. De leerling moet hier een paar lijnen gaan tekenen, maar meestal laat hij dit na. De leraar moet hem aanmoedigen om in dergelijke situaties wat extra moeite te doen door het tekenen van een aantal concrete voorbeelden.
Als hij er genoeg neemt wordt hij beloond doordat hij gaat 'zien' dat de lijnen een parabool omhullen. In elk geval zal de overgang van deze naar de abstractiefase plaatsvinden zodra hij zich een voorstelling kan maken van alle lijnen van het stelsel.
Ad e): Hier zijn niet zoveel problemen. Als de leerling bij (a) per ongeluk de gevraagde waarde neemt ($p = 1$) en de bijbehorende parabool tekent, zal hij ontdekken dat de voorbeelden uit (d) allen voldoen. Kiest hij een ander getal (bijvoorbeeld $p = 2$) dan zal hij bij de voorbeelden, die hij bij (d) tekent duidelijk de motivering van het vraagstuk gaan inzien. Het voorbeeld voert hier vermoedelijk sneller tot begrijpen van het probleem.

Abstractie

De leerling heeft besloten welke bewijsmethode hij kiest en gaat aan het werk. Hij substitueert geen getallen voor k en p, maar doet wel alsof k en p bepaalde getallen zijn.

Expliciteren

Nadat hij de oplossing gevonden heeft moet de leerling beseffen, dat wat hij in de abstractiefase gedaan heeft geldt voor elke k, en dus voor elke lijn van het stelsel.

Verwerken

De leerling rekent het allemaal nog eens na met de gevonden waarde van p. Liefst met een andere methode dan hij eerder gebruikte. Ook dit nemen van de proef op de som is iets waartoe leerlingen gewoonlijk moeilijk te brengen zijn.
Toch is het een essentieel deel van een rationele werkmethode.
De oplossing wordt netjes en overzichtelijk opgeschreven.
Opmerking: Duidelijk is hoe belangrijk hier het **sorteren** is. Als die goed is doorgekomen is het probleem zo goed als opgelost. Dat is overigens niet altijd het geval.

Vraag. In hoofdstuk 10 van De Cecco wordt het volgende schema gegeven voor het onderwijzen van begrippen. Het is een verfijning van het hier gegeven ruwe model.
Step 1: Describe the performance expected of the student after he has learned the concept.
Step 2: Reduce the number of attributes to be learned in complex concepts and make important attributes dominant.

Step 3: Provide the student with useful verbal mediators.
Step 4: Provide positive and negative examples of the concept.
Step 5: Present examples in close successions or simultaneously.
Step 6: Present a new positive example of the concept and ask the student to identify it.
Step 7: Verify the student's learning of the concept.
Step 8: Require the student to define the concept.
Step 9: Provide occasions for student responses and the reinforcement of these responses.

a Ga na dat het ruwe model in het schema van De Cecco te herkennen is.
b Onderzoek of de gegeven voorbeelden A (blz. 173) en B (blz. 175) aan dit verfijnde model voldoen.
c Waarom stelt De Cecco de eis in 'Step 4'?
d Waarom 'Step 5'?
e De Cecco zegt zelf dat 'Step 9' chronologisch niet als laatste stap op die plaats thuishoort, maar tijdens het gehele proces moet werken. Waarom? Wat bedoelt hij met 'reinforcement'?
f Waarvoor dient 'Step 2'?

Meetkunde met vectoren V[1]

(verzamelingen)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Een onderwerp, dat in de analytische meetkunde in het middelpunt van de belangstelling stond, is het opsporen van de verzameling punten, die aan de een of andere eis voldoen. Al deed men nog zo zijn best dit soort opgaven correct te behandelen, toch moest men wel eens met de franse slag tewerk gaan. Deed men dit niet, dan dreigde het maken van een vraagstuk te ontaarden in een eindeloos nagaan, of men wel strikt de hand gehouden had aan de eis, dat elke volgende bewering gelijkwaardig moet zijn aan de vorige.
Bij de behandeling van meetkunde met vectoren doen zich deze problemen ook voor. Doordat de stof hier eenvoudiger is en we ons niet uitputten in de behandeling van allerlei opgaven met tweedegraads krommen, kunnen we nu de eis stellen exact tewerk te gaan zonder dat we dan dreigen ons te verliezen in moeizame gelijkwaardigheidsbeschouwingen. Aan een voorbeeld wordt dit duidelijker.

Opgave. Gevraagd de verzameling van de snijpunten van de lijnen, die

evenwijdig zijn aan $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ snijden

met het vlak

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Oplossing. Volgens mij is het essentieel, dat de oplossing er als volgt uitziet:

$\mathbf{p}$ voldoet $\Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow$ enz.

Als voorbereiding eerst het volgende. Een lijn door $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ die evenwijdig is aan

$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ heeft als p.v.

[1] De voorgaande artikelen vindt men in Euclides, 48-1, 2, 3 en 4 (de eerste vier nummers van deze jaargang).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Deze lijn snijdt de lijn

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

is gelijkwaardig met

$$\exists\, \lambda, \mu : \begin{cases} p_1 - \lambda = 1 \\ p_2 + 2\lambda = 2 - \mu \\ p_3 + 3\lambda = 1 + \mu \end{cases}$$

Eliminatie van λ en μ levert, dat dit gelijkwaardig is met

$$5p_1 + p_2 + p_3 = 8. \qquad (1)$$

Het punt $\mathbf{p}$ ligt in

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

is gelijkwaardig met

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0. \qquad (2)$$

Uit de resultaten (1) en (2) blijkt:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ voldoet } \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 5p_1 + p_2 + p_3 = 8 \\ \\ p_1 + p_2 + p_3 = 0 \end{matrix} \right\} \qquad (3)$$

Nu komt het moment, waarop ik vroeger geleerd heb, in de analytische meetkunde, dat men de coördinaten lopend moest maken. Ook wel zei men, dat men de indices moest weglaten en er dan was. Hoe het ook zei, het kwam erop neer, dat men x_1 en y_1 ging vervangen door x en y en dan de 'meetkundige plaats' gevonden had. Begrepen heb ik dit nooit, ook niet, toen ik het later zelf mijn leerlingen probeerde wijs te maken.

In ons geval komt de handelwijze hierop neer, dat we uit (3) concluderen:
de gevraagde verzameling is

$$\begin{matrix} 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$$

De aanvankelijk ietwat verbaasd kijkende leerling zal er spoedig aan wennen, dat het zo moet. Welke stap ontbreekt?

$$\left. \begin{matrix} 5p_1 + p_2 + p_3 = 8 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \text{ het punt } \mathbf{p} \text{ ligt op } \left\{ \begin{matrix} 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right.$$

Het is maar een kleinigheid, die ingelast is. Maar nu is het duidelijk, dat

$$\mathbf{p} \text{ voldoet} \Leftrightarrow \mathbf{p} \text{ ligt op} \quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Anders gezegd:
de gevraagde verzameling is de lijn

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Van minder belang is, dat we deze lijn eenvoudiger kunnen schrijven:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Op gevaar af langdradig te worden, wil ik het nog eens anders, en wel 'eenvoudiger', doen. De lijnen, die

$$\text{evenwijdig zijn aan } \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ snijden,}$$

liggen in het vlak met p.v.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De vergelijking van dit vlak is

$$5x_1 + x_2 + x_3 = 8.$$

De gevraagde verzameling is dus de lijn

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Als u het nagaat, zult u zien, dat het rekenwerk precies hetzelfde is als bij de eerste methode. Alleen het denkwerk is eenvoudiger. Dat geeft te denken! Het is een aangenaam gegoochel, maar van gelijkwaardigheid is geen spoor meer te zien. Om mijn bezwaren kracht bij te zetten: vervang in de opgave de

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ eens door de lijn } \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En vervang het gegeven vlak

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

door

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

De lijn

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

heeft met het vlak

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

geen enkel punt gemeen. De eerste methode ondervindt van de aangebrachte verandering geen invloed. Bij de tweede methode moeten we de zaak opnieuw bekijken en nagaan of alles in dit geval nog klopt. En dat pleit niet voor de duidelijkheid ervan.
(Onder verzameling van de snijpunten is verstaan: verzameling van de gemeenschappelijke punten.)

Opgave. Gevraagd de middens van de verbindingslijnstukken van de kruisende lijnen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Oplossing. **p** is het midden van het lijnstuk met uiteinden **a** en **b** wil zeggen:

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

of $\quad 2\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$

Nu kunnen we meteen opschrijven:

$$\mathbf{p} \text{ voldoet} \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu\colon 2\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu\colon \begin{cases} 2p_1 = 1 - \lambda + \mu \\ 2p_2 = 2\lambda - \mu \\ 2p_3 = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Eliminatie van λ en μ levert, dat dit gelijkwaardig is met

$$3p_1 + 3p_2 - p_3 = 1.$$

Dus

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \text{ voldoet} &\Leftrightarrow 3p_1 + 3p_2 - p_3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{p} \text{ ligt in } 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{aligned}$$

De gevraagde verzameling is dus het vlak

$$3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1.$$

Uit deze twee voorbeelden ziet men ook, hoe essentieel het eliminatieproces is. Vandaar, dat ik volhoud, dat het verstandig is de eerste keer, dat dit proces voorkomt, het meteen goed te behandelen. En deze eerste keer was bij het afleiden van de vergelijking van een vlak uit de parametervoorstelling.

Kolleges sterrekunde voor afgestudeerden - 1973

In het kader van de kolleges sterrekunde voor afgestudeerden, die jaarlijks door het Sterrekundig Instituut te Utrecht worden georganiseerd zal de volgende cursus gewijd zijn aan het onderwerp

INFRAROOD - STERREKUNDE

De volgende voordrachten zullen worden gehouden; steeds van 19.30 tot 21.15 uur, met een kwartier pauze:

Donderdag 18 januari: dr. R. van Duinen (Groningen): waarnemingsmethoden en instrumentale technieken.
Donderdag 25 januari: drs. J. Kuijpers (Utrecht): kosmische achtergrond straling in het verre infrarood en het mm gebied.
Donderdag 1 februari: Prof. dr. S.R. Pottasch (Groningen): infrarode straling uit de melkweg.
Donderdag 8 februari: dr. J.W. Hovenier (V.U. Amsterdam): Infrarood onderzoek van planeten.

In *tegenstelling tot een vroegere aankondiging* zullen de voordrachten nu worden gehouden in een van de geriefelijke zalen van het *Jaarbeurs-congrescentrum* (Beatrix gebouw) aan de Croeselaan (naast het Jaarbeursplein) te Utrecht.
Voor wie per trein komt is dit direct te bereiken via de traverse over het station. Aan het eind van de traverse ga men naar links (Beatrix gebouw), de trap af naar de hal, waar de receptionist u verder zal helpen.
Voor wie per auto komt: er is een ruime parkeergarage aan het Jaarbeursplein, tegenover het Beatrixgebouw.

Men kan zich opgeven bij: Secretariaat Sterrekundig Instituut, Beneluxlaan 21, Utrecht

C. de Jager

Korrel CLXXXIII

Het Klaverblad

Het klaverblad, gevormd door de figuur van drie elkaar twee aan twee snijdende cirkels, doet als venndiagram uitstekende diensten in de verzamellingentheorie. De drie cirkels verdelen het platte vlak in acht deelgebieden. Deze deelgebieden kunnen op ondubbelzinnige wijze illustreren, of een element dat men afbeeldt al of niet tot de verzameling V_1, V_2 *of* V_3 behoort.
In fig.1 zijn de acht deelgebieden binair genummerd: 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000.

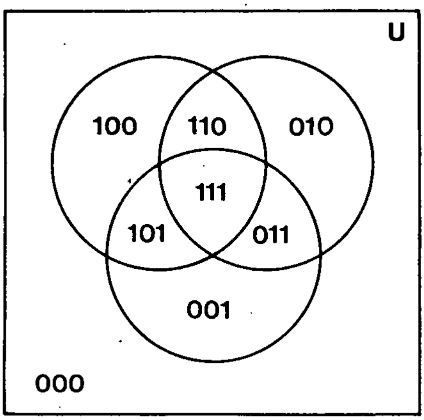


fig.1

Zo behoort een element dat in 101 wordt afgebeeld, wel tot de eerste verzameling, niet tot de tweede en wel tot de derde.
Dit 'klaverblad' laat ons in de steek, zodra we vier deelverzamelingen door vier cirkels willen afbeelden. Dit is een gevolg van het feit, dat vier cirkels het platte vlak in hoogstens 14 deelgebieden kunnen verdelen, terwijl we voor een volledige illustratie 16 deelgebieden nodig zouden hebben: elk der acht gebieden uit fig.1 behoort te worden onderverdeeld.

Vanwaar dit getal 14?
De vierde cirkel in fig.2 verdeelt de gebieden 100, 101, 111, 011, 010, 000, maar de twee gebieden 110 en 001 niet. Gemakkelijk blijkt, dat het onmogelijk is door de vierde cirkel *alle* acht gebieden uit fig.1 onder te verdelen.

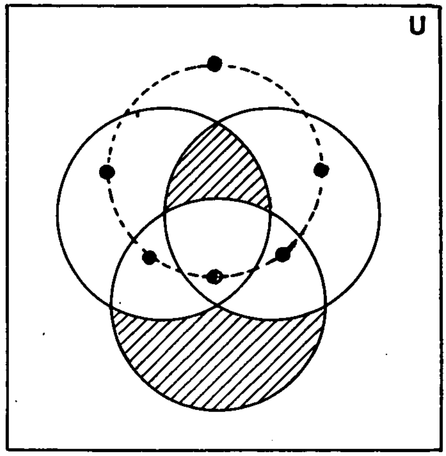


fig.2

Om dit toe te lichten hebben we in fig. 2 in elk deelgebied een stip gezet in de boog van cirkel 4 die in het desbetreffende gebied ligt. Met elk gebied dat onderverdeeld wordt corresponderen twee snijpunten van de vierde cirkel met de overige cirkels, totaal zijn er dus $\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$ nieuwe snijpunten.
Zouden alle 8 deelgebieden uit fig.1 onderverdeeld zijn, dan zouden er ook 8 nieuwe snijpunten dienen te komen, terwijl de vierde cirkel op elk der vorige cirkels hoogstens twee nieuwe snijpunten kan geven, totaal dus hoogstens $3 \times 2 = 6$.
Hieruit mogen we concluderen, dat het platte vlak door vier cirkels hoogstens in $8 + 6 = 14$ deelgebieden kan worden verdeeld.

Door voor de vierde kromme in plaats van een cirkel een ellips te kiezen kan men wel tot 8 nieuwe snijpunten en daarmee tot 8 nieuwe deelgebieden komen.

Ook bij het klaverblad van drieën kan men desgewenst andere gesloten kromme i.p.v. cirkels kiezen. Men dient er dan wel voor te waken dat men niet teveel snijpunten krijgt.

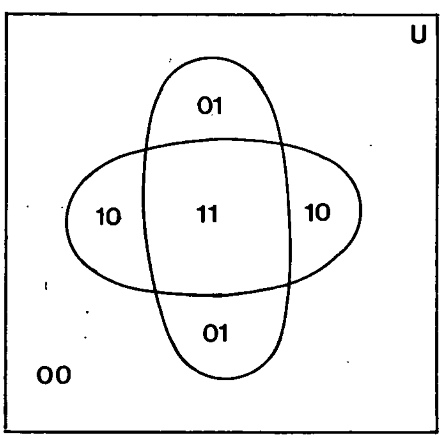


fig.3

Zo wordt in figuur 3 het aantal deelgebieden groter dan wenselijk is: het gebied 01 (en eveneens het gebied 10) valt in twee disjuncte delen uiteen, een bezwaar dat bij cirkels niet kan optreden.

Tot slot geven we nog een voorbeeld met rechthoeken in plaats van cirkels.

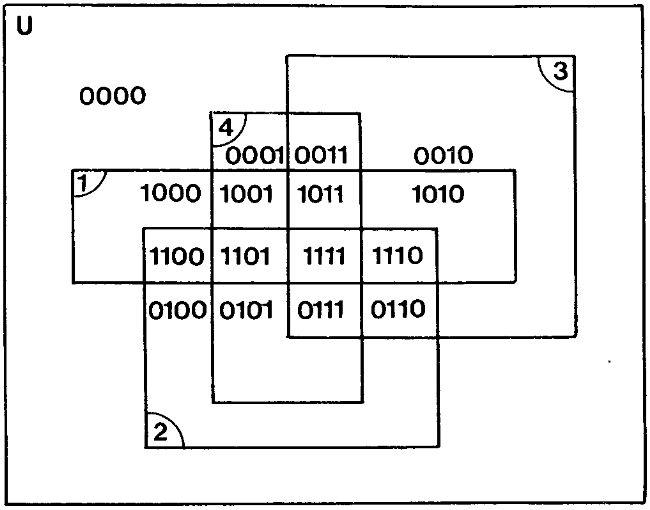


fig.4

In fig.4 hebben de rechthoeken 1, 2 en 3 twee aan twee 2 snijpunten. Rechthoek 4 snijdt rechthoek 1 in 4 punten, de beide overige telkens in 2.

Joh. H. Wansink
Arnhem

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Openingsrede

door de heer Dr. J.K. van den Briel voor de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren op zaterdag 28 oktober 1972 te Utrecht.

Dames en Heren,

Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is het voor mij een genoegen u allen hier te begroeten.
Een bijzonder woord van welkom tot ons erelid Dr. Joh. H. Wansink. Dat u weer eens in de sfeer van de u zo vertrouwde vereniging wilt komen doet ons groot genoegen. 'We hebben u in Exeter gemist'.
In de persoonlijke sfeer moet helaas herinnerd worden aan het feit dat op 17 februari van dit jaar ons erelid P. Wijdenes, bijna 100 jaar oud, overleden is. Het wiskundeonderwijs in Nederland en België heeft bijzonder veel aan hem te danken en hoewel de periode waarin die invloed viel, ver achter ons ligt, (van 1910 tot 1940) en voor vele van onze leden het begrip Wijdenes slechts een naam is, toch zou het niet juist zijn als hier niet geconstateerd werd dat die invloed bijzonder groot en goed is geweest, en de modernisering door hem bevorderd, in die tijd even belangrijk was als hetgeen we nu meemaken. Ik verzoek u staande hem enige ogenblikken te gedenken.
De sprekers van deze dag verdienen een speciaal dankwoord: Dr. D. van Dalen, onze penningmeester Drs. J. van Dormolen en Dr. R. Holvoet. Maar de heer Holvoet is hier ook in een andere functie, nl. als vertegenwoordiger van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraars. Nadat onlangs twee van onze bestuursleden de jaarvergadering van de Belgische zustervereniging hebben bijgewoond, is het voor mij bijzonder aangenaam u, heer en mevrouw Holvoet, en de heer De Munter in ons midden te begroeten. Ook vorig jaar was dit contact er doordat u beiden aanwezig was; laat het feit dat er vandaag drie vertegenwoordigers uit België zijn, een symbool zijn van de groeiende contacten en samenwerking van de beide verenigingen.
De inspecteurs hier aanwezig, de heren Drs. B.J. Westerhof, Drs. W.E. de Jong en N.J. Zimmerman zijn graag geziene gasten. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de oud-inspecteur E.H. Schmidt, die we vele jaren in een officiële functie op onze jaarvergaderingen zagen.

Velines is vertegenwoordigd door de heer Markerink; de firma Wolters-Noordhoff door de heren Drs. Oosten en Soeteman; de redaktie van Euclides door Drs. A.M. Koldijk. Al deze gasten zijn hier welkome vrienden, die de vele contacten vertegenwoordigen die onze vereniging heeft.
Naar mijn mening komen we thans in een kritieke en belangrijke fase van de reorganisatie noodzakelijk door de Mammoetwet. Hebben alle collega's van de MAVO deze zomer de afsluiting van hun eerste eindexamen nieuwe stijl gehad, de docenten van het HAVO zijn hun eindexamen-jaar ingetreden en aan vele scholen zal deze week de eerste fase van het schoolonderzoek zijn afgewerkt. Bij het V.W.O. wordt nu in de bovenbouw in ernst met het nieuwe leerplan gewerkt en zijn de leerlingen verdeeld in groepen in plaats van in klassen. 't Is wel duidelijk dat zich bij het wiskunde-eindexamen van MAVO-vier geen ernstige moeilijkheden hebben voorgedaan. Het gemiddelde eindexamencijfer voor wiskunde was voldoende en bij besprekingen over het afgelopen examen is natuurlijk wel kritiek geuit, maar in het algemeen was men tevreden. Ook dìt jaar heeft het bestuur van de Vereniging een aantal bijeenkomsten georganiseerd, waar de experimentele eindexamens zijn besproken en waar inlichtingen werden gegeven over de nieuwe organisatie en het nieuwe leerplan. Op zes plaatsen voor het MAVO met in totaal 275 aanwezigen, op vijf plaatsen voor het HAVO voor in totaal 225 collega's en in Utrecht op 9 september voor het VWO, waar ongeveer 125 docenten aanwezig waren.
Over het algemeen waren het zeer geslaagde bijeenkomsten en men voelde ervoor deze ook nog volgend jaar te herhalen. De inspecteurs Drs. B.J. Westerhof en N.J. Zimmerman waren op alle hen betreffende vergaderingen aanwezig en een bijzonder woord van dank hiervoor namens de collega's is hier zeker op zijn plaats.
Na dit schooljaar zal de Centrale Begeleiding Mavo Wiskunde geen subsidie meer ontvangen. Het algemene gevoelen is dat dit zeer te betreuren is en het Bestuur is van mening dat een voortzetting van de subsidie voor dit werk zeer gewenst is. Een dergelijke begeleiding zou eigenlijk ook voor de wiskundedocenten van het Lager Beroepsonderwijs moeten bestaan. Voor wat het VWO betreft zal de inspectie in de komende weken in een groot aantal plaatsen bijeenkomsten organiseren voor het geven van inlichtingen en het bespreken van problemen die bij de verschillende vakken voorkomen, waar wiskunde natuurlijk ook bijhoort.
Het bestuur kan er niet genoeg op aandringen om, als iemand inlichtingen wenst over aantal uren, leerplan, organisatie enz., zich te wenden tot de betreffende Inspecteur of de Bestuursleden van de Vereniging, zodat het niet meer kan voorkomen, dat een wiskundecollega nu nog denkt dat de examenstof voor Wiskunde 2 bij het VWO alleen maar bestaat uit het éne keuzeonderwerp. Dit gebeurde nog zeer kort geleden. De Vereniging zal nog steeds, samen met dàt deel van de Inspectie, belast met het toezicht op de wiskunde, moeten optreden als organisatie waar inlichtingen zijn te krijgen over de veranderingen, die in ons wiskundeonderwijs hebben plaatsgevonden. Suggesties van de leden, hoe dit het beste kan geschieden, zijn altijd zeer welkom.
Andere activiteiten van de Vereniging komen tot uiting in het werk van de commissies. De opgavencommissie voor het VWO heeft onder leiding van Dr.Ir.

B. Groeneveld haar werk beëindigd en de opgavenverzameling is verschenen onder auspiciën van de Vereniging. Een enkele opmerking over het peil van de vraagstukken: een aantal ervan (in hoofdstuk 4) is beslist bedoeld als extra oefenstof (indien er tijd voor is) boven het niveau van het toekomstige eindexamen. Door de reeds gegeven experimentexamens is dat niveau op dit moment wel ongeveer vast te stellen. Zoals u weet is er door een kleine commissie namens de C.M.L.W. een aantal vraagstukken gemaakt op het peil van het aanstaande HAVO-eindexamen, en gepubliceerd in het juni-juli nummer van Euclides.

De nomenclatuurcommissie onder leiding van Dr. P.G.J. Vredenduin, waarvan een tweede interimrapport is verschenen, hoopt tegen het eind van dit jaar haar werkzaamheden af te sluiten, waarna met subsidie van het Departement het eindrapport gepubliceerd zal worden. De leden van deze beide commissies verdienen voor het vele werk dat gedaan is, geheel in hun schaarse vrije tijd, onze hartelijke dank, want in beide gevallen is iets blijvends tot stand gekomen waar wij allen bij ons onderwijs voordeel van hebben.
De didactiek-commissie is tot nu toe weinig naar buiten getreden, maar de vergaderingen waren voor de leden bijzonder interessant en stimulerend door de onderlinge gedachtenwisseling. Er zal nu door het I.O.W.O. (Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs) een publikatie worden uitgegeven waarvoor de Didactiekcommissie de verantwoordelijkheid op zich neemt. Deze uitgave, geschreven door Drs. J. van Dormolen en waar vele anderen door waardevolle suggesties aan hebben bijgedragen, bestaat uit twee delen: een algemene inleiding over het opstellen van een onderwijsplan; èn de praktische uitvoering op een bepaald onderdeel, in dit geval de distributieve eigenschap. We hopen dat tegen het eind van dit jaar de leden van de vereniging dit kleine boekje zullen hebben ontvangen, en dan zal er vermoedelijk in de maand februari 1973 een tweedaagse conferentie georganiseerd worden, voor die leden die belangstelling voor deze zaken hebben, om gezamenlijk deze manier van opstellen van een onderwijsplan toe te passen op andere delen van ons wiskundeprogramma. Vanzelfsprekend volgen hier nog gedetailleerde mededelingen over hoe men zich voor die conferentie kan opgeven.
Eigenlijk is met het bespreken van dit aspect van de werkzaamheden van de Vereniging al het nauwe contact met de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde genoemd. Een bijzonder woord van erkentelijkheid aan de C.M.L.W. die ons in staat stelt deze publicatie uit te geven is hier zeker op zijn plaats. De ontwikkeling die het C.M.L.W. sinds de oprichting in 1961 heeft doorgemaakt en vooral de instelling van een eigen instituut, het I.O.W.O., waardoor een landelijk centrum voor het wiskundeonderwijs is ontstaan, maakt deze staatscommissie steeds meer het orgaan, dat leiding heeft bij het wiskundeonderwijs in ons land, vooral ook omdat er zoveel invloed mogelijk is door inspraak uit het veld.
Het werk van de C.M.L.W. is nu verdeeld over enige subcommissies, die o.a. het wiskundeonderwijs op de verschillende soorten van scholen behandelen en waarvan de uitvoering gebeurt door de betreffende afdelingen van het I.O.W.O. Bijzonder verheugend is ook dat de subcommissie Algemeen Voortgezet Onderwijs

onder voorzitterschap van Prof.Dr. E. van der Blij begonnen is een inventaris te maken van alle problemen, die bij dit onderwijs voorkomen, en vanzelfsprekend in de toekomst ook haar aandacht zal wijden aan het bijschaven van het wiskunde-leerplan voor de scholen van deze sector. Het is echt niet de bedoeling nu weer alles te gaan reorganiseren, we hebben een zekere tijd van consolidatie en rust nodig, maar even duidelijk is dat in de toekomst bv de computerkunde ingepast zal moeten worden in of naast het wiskunde-onderwijs.
Een andere organisatie waar de vereniging mee te maken heeft is de Raad van Vakgroepen, bestaande uit vertegenwoordigers van alle verenigingen van docenten in een bepaald vak. Deze raad werkt samen met het Nederlands Genootschap van leraren en in de toekomst hopelijk ook met het MAVO-verband. Het is de opvatting van het bestuur van de Vereniging dat deze Raad van Vakgroepen alleen zal fungeren als adviesorgaan van de beide bovengenoemde algemene docenten-organisaties en niet zelfstandig naast deze beide naar buiten zal optreden.
Een zeer bijzondere gebeurtenis in het afgelopen jaar was het International Congress of Mathematical Education te Exeter in Engeland. Ongeveer 1300 deelnemers (waarvan 45 Nederlanders) uit 62 verschillende landen zijn daar samengeweest om elkaar te leren kennen, ervaringen uit te wisselen en gezamenlijke problemen te bespreken. Er waren 40 werkgroepen waarin alle mogelijke onderwerpen werden behandeld, er was vertoning van wiskundefilms, er waren tentoonstellingen door uitgevers en demonstraties van experimenten, kortom een bijna volledig beeld van wat er aan de vernieuwing van het wiskundeonderwijs over de gehele wereld werd, wordt en zal worden gedaan. Een aantal leden hebben van de Vereniging een bijdrage in de kosten, verbonden aan het bezoek aan Exter, ontvangen.
In de persoonlijke sfeer moet herinnerd worden aan het feit dat Dr. H.A. Gribnau op 1 augustus van dit jaar gepensioneerd is. Namens de vereniging dank ik hem hartelijk voor hetgeen hij altijd voor de wiskundedocenten van V.H.M.O., V.W.O. en H.A.V.O. wilde doen en speciaal voor zijn aandeel in de modernisering van de laatste jaren.
Door de oprichting van het Nederlands Genootschap van Leraren is de groep Liwenagel van het Genootschap van Leraren van Gymnasia en Lycea opgeheven. Er is lange jaren een aangename samenwerking geweest, maar uit een oogpunt van efficiency is de thans ontstane toestand veel beter, temeer daar vele collega's reeds lid van beide groeperingen waren. Het aantal leden van onze Vereniging bedroep op 1 augustus 1972: 1723.

Het blad Pythagoras blijft zich in uitstekende belangstelling verheugen en ook de leesportefeuille, voortreffelijk en met veel ervaring georganiseerd door Dr. A.J.W.M. Smeur, voorziet voor vele leden in een belangrijke behoefte. Hoewel de resultaten van de internationale Wiskunde Olympiade, minder goed waren, wordt toch door de jeugd veel prijs gesteld op de contacten, die op deze manier met andere landen tot stand komen.
Ik heb al gezegd dat we in een kritieke en belangrijke fase van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs zijn gekomen. Maar voor de docenten ook in een zeer vermoeiende fase (waar we eigenlijk al jaren in zijn) en naar mijn mening een

bijzonder stimulerende fase. Ik wens u, ondanks alle drukte, moeilijkheden en teleurstellingen, toe, dat u het inderdaad kunt zien als een zeer interessant en waardevol jaar, waar van ons allen veel geëist zal worden, maar dat toch ook daarom de moeite waard zal zijn.
Hierbij verklaar ik de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren voor geopend.

CONTRIBUTIE

De penningmeester verzoekt alle leden hun geweten en administratie te rade te gaan of zij de contributie over het lopende verenigingsjaar, groot *f* 20,– (inclusief abonnement op Euclides) al hebben betaald en als dat niet zo is zulks spoorslags te doen.
Het gironummer is 143917, t.n.v. Ned. Ver. van Wiskundeleraren te Amsterdam.

Boekbesprekingen

Paulo Ribenboim, *Algebraic numbers*,
John Wiley and Sons ltd., 1972 $ 7.10.

Een inleiding in de theorie der algebraïsche getallen. Als uitgangspunt is de ideaal-theoretische benadering gekozen, zodat valuaties niet ter sprake komen. Ofschoon wij een valuatie-theoretische opzet (die men toch niet kan missen bij een verdergaande bestudering van het vak) prefereren is dit goeddeels een kwestie van smaak, en heeft de gevolgde methode het voordeel iets sneller tot het doel te voeren. Het boek bevat wat men van een inleiding mag verwachten, en is helder geschreven. Weinig voorkennis wordt verondersteld; slechts de beginselen van de algebra, met inbegrip van de Galois-theorie, dient men te beheersen. Analytische methoden ontbreken.
Zeer nuttig achten wij het grote aantal vraagstukken dat is opgenomen. Het laatste hoofdstuk, waar aan de hand van concrete gevallen numerieke berekeningen worden uitgevoerd, kan bijdragen tot een beter begrip voor de – voor velen wellicht wat abstract lijkende – stof.
Alles bij elkaar een goed boek voor een eerste kennismaking met het vak.

A. Menalda

D.J. Karman en P.Chr. Scholten, *Wees wijs met wiskunde,* serie 1, J.H. Kok N.V., Kampen.

Voor mij ligt een uiterlijk prettig aandoend mapje met 15 lessen van elk 4 pagina's en een toelichting van 16 pagina's voor de onderwijzer. Ze zijn bestemd om kinderen van de hoogste drie klassen van de basisschool *in groepjes spelenderwijs* met wiskunde in contact te brengen. De onderwerpen zijn: Labyrinth, Puzzelen, Nieuw stadsplan, Plantenwijk, Ons nieuwe huis, Jaap ligt in het ziekenhuis, Memory geheugenspel, Vissen vangen van elkaar, Geheimschrift, Schooltuintjes, Schateiland, Van punt tot punt, De ene tekening lokt de andere uit (blijkbaar in navolging van Escher), Stokjes en steentjes, Spijkers en winkelhaken.
Vluchtig doorbladeren geeft mij de verwachting dat het inwendige met de buitenkant in harmonie zal zijn omdat de aardige, vaak geestige illustraties het kind wel zullen aanspreken. Preciese kennismaking stelt die verwachting niet teleur. De *belangstelling* van de kinderen is terstond getrokken. De onderwijzer vindt de gelegenheid de lessen met biologie, aardrijkskunde en geschiedenis te laten *diffunderen.* Dat is heel wat anders dan de droge rekenlessen van vroeger (wat kinderen ondanks dat toch wel graag deden). Vaak wordt verwacht, dat de leerlingen niet alleen van probleem naar oplossing, maar ook andersom zullen denken, waarmee de auteurs bewijzen, ook het beginsel van de *reversibele denkrichting* gehanteerd te hebben. Het zo vaak verwaarloosde *creatieve denken* wordt er door bevorderd.
Lettende op de cursivering vinden we dus al zes pluspunten!
De lessen 3-13 gaan over coördinaten. Ondanks de grote hoeveelheid voorbeelden vind ik het jammer, dat een greep in het schaakspel ontbreekt. Ook zou de voetballerij gelegenheid geven, met getallenparen te werken, overwinningen rechts beneden, gelijk spel op de bisectrice, enz.
Tegen dit aardige werkje heb ik geen wiskundige of didactische bezwaren, maar jammer genoeg zijn er wel bezwaren uit taalkundig oogpunt. Om een greep te doen: Het veelvuldig gebruik van 'om', zelfs dubbelzinnig in: 'Leren om zelfstandig te denken', 'hoeveel *dingen* een verzameling *heeft*' en de door bijna iedereen gemaakte imperatieffout hou*dt.* En waarom zoveel eer bewezen aan het dubbelpuntige deelteken, terwijl het buiten de lagere school niet functioneert? In de computertaal kennen we de schuine streep.
Om weer in majeur te eindigen: Ik heb deze serie met bijzonder veel genoegen en instemming bekeken en wens de schrijvers graag veel succes met deze en de volgende series. Ze zullen hun weg wel vinden!

J.K. Timmer

J.A. Hartman en Dr. P.M. van Hiele, *A-Z, werkboek der wiskunde voor het L.T.O.*, deel 1, brugjaar, 200 blz., f 12,90 **het L.T.O.**, deel 1, brugjaar, 200 blz., f 12,90

Naast de reeds bestaande series van A tot Z voor het mavo, voor het havo en vwo komt nu ook een eigen serie voor het lto, p- en t-stroom, waarvan het eerste deel, dat zojuist is verschenen, bestemd is voor het brugjaar.
De leerstof is afgestemd op de methoden zoals bij de bovengenoemde vormen van onderwijs in gebruik zijn, uiteraard gebaseerd op de nieuwe inzichten, de moderne wiskunde.
M.i. zijn de schrijvers in hun streven geslaagd dit deel te schrijven in een taal die voor deze leerlingen begrijpelijk is.
De voorbeelden zijn praktisch en technisch van aard en zullen de leerlingen zeker het gevoel geven van erbij betrokken zijn.
De volgende onderwerpen worden o.a. behandeld: relaties, functies, coördinaten, grafieken, verzamelingen, cirkel, vergelijkingen en symmetrie en spiegeling.
Aan het slot wordt nog enige aandacht gegeven aan het begrip matrix en aan het vermenigvuldigen, delen, optellen en aftrekken van negatieve getallen. Al in de eerste lessen wordt de rekenliniaal ingevoerd.
Bij het doorlezen van dit 200 blz. tellende boekje heb ik mij meerdere malen afgevraagd of er niet te veel onderwerpen worden behandeld voor het brugjaar. Het is bekend dat vele leraren, wanneer een leerboek op school is ingevoerd, zich willen houden aan de daarin geboden leerstof.
Moge spoedig een herziene of tweede druk verschijnen waarin rekening wordt gehouden met het langzame tempo waarin lts-leerlingen deze moderne leerstof kunnen doorwerken. Aanbevolen.

P.J. van der Pligt

Clifford W. Marshall, *Applied graph theory*, (Wiley-Interscience, 1971)

Dit is een bijzonder aardig boek met veel informatie. Naast allerlei klassieke problemen over grafen en verwante combinatorische opgaven bevat dit boek mede informatie over 'randomgraphs'. Wist u dat de kans dat twee grote cirkelbogen van minder dan 180° op de bol om elkaar te snijden gelijk is aan 1/8?
Natuurlijk kunt u in dit boek de laatste stand, met verwijzingen, over het vierkleuren probleem vinden: In 1968 bewezen Ore en Stemple dat een niet met vier kleuren te kleuren kaart ten minste 40 landen moet tellen.
Natuurlijk kunt u er alles in vinden over niet vlak voor te stellen grafen (de 5-hoek met alle diagonalen en het bekende vraagstuk over de drie huizen met een gas-, water- en electriciteitstoevoer).
Maar ook dat Fary in 1948 bewees dat iedere graaf met rechte lijnen te realiseren is.
Wist u dat het schaakbord op 16 x 901 x 901 manieren te overdekken is met dominostenen?
Weet u wat het bijzondere is van Walthers graaf met 114 hoekpunten?
Het boek heet Applied Graph Theory, in de laatste hoofdstukken wordt aandacht gegeven aan toepassingen van de grafentheorie op het gebied van de operationele research, van de sociologie, van de psychologie en van de natuurkunde, o.a. het doorlekken van een vloeistof langs een zeshoekig netwerk van kanaaltjes!
Het boek vraagt geen bijzondere wiskundige voorkennis en zal iedere belangstellende leraar plezier kunnen verschaffen, er staan bovendien een groot aantal opgaven na ieder hoofdstuk om het plezier een creatief facet te geven.
De uitvoering is verzorgd, er zijn vele diagrammen en figuren in de tekst opgenomen. Veel recente en moeilijk te verkrijgen resultaten zijn zonder bewijs, maar met gedetailleerde verwijzingen opgenomen.

F. van der Blij

J. Verlooy, De Rij 4/5, *Beschrijvende Statistiek* (reeks Moderne Wiskunde), De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen 1971, 91 blz., 95 BF.
Dit is het laatste deeltje van de serie van vijf, die bestemd zijn voor het vierde leerjaar. In totaal 936 blz.!
Ik heb er altijd respect voor, als iemand een boekje weet te schrijven over het zo betrekkelijk droge onderwerp beschrijvende statistiek, dat toch leesbaar is. De auteur is daarin geslaagd. De behandelde onderwerpen zijn de gebruikelijke. Aardig vond ik de afleiding van de ietwat mysterieuze formule voor de standaardafwijking van een populatie uit een steekproef

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - x)^2 n_i}{n-1}}$$

Dat hier in de noemer $n - 1$ en niet n moet staan, wordt op aannemelijke wijze duidelijk gemaakt.

P.G.J. Vredenduin

Raymond Broeckx, De Rij 5/1, *Algebra* 3 (reeks Moderne Wiskunde), De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen 1971, 216 blz., 195 BF.
Dit boek is bestemd voor het vijfde leerjaar. De ondertitel luidt: Matrices, determinanten, lineaire vergelijkingen, complexe getallen, veeltermen in $\mathbb{C}$.
De behandeling van de matrices en van de determinanten is normaal. De matrixvermenigvuldiging wordt gemotiveerd vanuit de samenstelling van transformaties. De determinanten worden ingevoerd volgens de 'val-uit-de-lucht' methode, een manier die ongetwijfeld het snelst tot resultaten leidt.
Het hoofdstuk over lineaire vergelijkingen heb ik met buitengewoon veel plezier gelezen. Op elegante wijze wordt van matrices en determinanten gebruik gemaakt om tot een volledige theorie te komen van het oplossen van m vergelijkingen van de eerste graad van n veranderlijken. Het hoofdstuk is begrijpelijk geschreven en goed leesbaar. Aan het slot wordt in tien regels de theorie van het elimineren gegeven, en volkomen goed en afdoende.
De complexe getallen worden, zonder motivatie, ingevoerd. Daarna volgt de theorie van het complexe vlak. Op alleraardigste manier wordt van dit complexe vlak gebruik gemaakt om een vlotte theorie op te bouwen van de congruenties, de homothetieën en hun samenstellingen. Dat b.v. de samenstelling van twee homothetieën weer een homothetie of een translatie is, wordt in een ommezien bewezen.
Na de complexe getallen volgt een theorie van de complexe veeltermen. Ditmaal wordt een exacte definitie gegeven: een complexe veelterm is een rij complexe getallen, waarvan er eindig veel van 0 verschillen. Optelling en vermenigvuldiging worden gedefinieerd, waarna blijkt dat we zo'n rij ook kunnen schrijven:

$$a + b\,(0, 1) + c\,(0, 0, 1) + d\,(0, 0, 0, 1) + \ldots$$

Stel hierin $z = (0, 1)$ en de veelterm luidt

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$$

Men komt nu niet in de verleiding voor z een getal te substitueren, want z is geen variabele. Toch is het moeilijk niet voor deze verleiding te bezwijken. In het nu volgende hoofdstuk over nulpunten van veeltermen in $\mathbb{C}$ vindt men al direct de stelling: $A(z)$ is deelbaar door $z - c \Leftrightarrow A(c) = 0$. En nu is voor z toch een complex getal c ingevuld. Natuurlijk is de stelling juist en kan men met weinig moeite de stelling zo redigeren, dat aan de bezwaren tegemoet gekomen wordt. Jammer vind ik, dat dit na de goede start niet gebeurd is.
Er volgt nu een uitvoerige behandeling van de veeltermvergelijkingen, waarbij zelfs derde- en vierdegraadsvergelijkingen opgelost worden. En dan nog een korte beschouwing over veeltermbreuken (weer op strenge manier ingevoerd) en het splitsen van een veeltermbreuk in partiële breuken.

Een gedegen stuk werk, dat vrij ver gaat en, zoals de auteur in het voorbericht zelf opmerkt, zelfs iets verder dan het voorgeschreven programma.

P.G.J. Vredenduin

Raymond Broeckx, De Rij 5/2, *Analyse* 1 (reeks Moderne Wiskunde), De Nederlandsche Boekhandel 1972, 291 blz., 225 BF.
Het boek is bestemd voor het vijfde leerjaar van het secundair onderwijs.
In dit boek wordt de differentiaalrekening behandeld. Interessant is na te gaan in hoeverre de behandeling afwijkt van de bij ons gebruikelijke. In het oog valt dan, dat de opzet strenger is dan bij ons. Sommige eigenschappen, die wij uit de figuur aflezen, worden hier bewezen. Zo vinden we nette bewijzen van de volgende stellingen:
ieder niet leeg deel van $\mathbb{R}$ dat een bovengrens heeft, heeft een kleinste bovengrens,
als een reële functie continu is in een gesloten interval en de functiewaarden aan de uiteinden verschillend teken hebben, dan is er een punt van het interval waar de functiewaarde 0 is, de tussenwaardestelling,
als een functie continu is in een gesloten interval, dan is ze begrensd in dat interval,
stelling van Rolle,
middelwaardestelling,
regel van l'Hospital,
als de afgeleide van een functie in een interval positief is, dan is de functie stijgend in dat interval.
Eigenlijk zijn de bewijzen van deze stellingen niet overdreven moeilijk.
Er wordt veel zorg besteed aan de definitie van een continue afbeelding. Deze wordt eerst door middel van omgevingen gegeven met betrekking tot een afbeelding van het platte vlak naar zichzelf. Daarna wordt overgegaan naar de ϵ-δ- definitie en in het vervolg wordt dan uitsluitend van deze definitie gebruik gemaakt. De limiet wordt gedefinieerd als continumakende waarde. Bij de oneigenlijke limieten wordt niet van omgevingen gebruik gemaakt. Met spanning heb ik uitgezien naar de definitie van een asymptoot, maar deze bleek toch ook in België niet van de aanschouwing losgemaakt te zijn.
Al met al een goed boek, waarvan men graag kennisneemt.

P.G.J. Vredenduin

Caleb Gattegno, *Zur Didaktik des Mathematikunterrichts*, Band 2, *Untersuchungen über Unterrichtsmaterialen*, 189 blz., geb. DM 23,80, Hermann Schroedel Verlag, Hannover, 1971.

Evenals deel I van dit didactisch werk, gerecenseerd in de 45e jaargang van Euclides, blz. 316, is ook dit tweede deel vertaald door R. en Kl. Heipcke en verschenen in een serie monografieën onder redactie van prof. dr. H. Roth.
Beide delen worden gepresenteerd als uitgaven van de *Internationale Commissie voor de Studie en de Verbetering van het Wiskunde-onderwijs*, de C.I.E.A.M., die in de periode 1950-1960 geleid werd door Gattegno, maar vanaf 1960 onder de bezielende leiding van Papy zou komen te staan. Beide nu in het Duits vertaalde delen hebben nog geheel betrekking op de Gattegno-periode. Ik heb de indruk dat dit boek niet zozeer op rekening gesteld kan worden van de genoemde internationale commissie, maar dat het een uitgave is geworden die voor de persoonlijke verantwoording komt te staan van Gattegno en een aantal bekwame medewerkers. Cattegno zelf is door de successen die het ook in dit werk besproken Cuisenairemateriaal heeft gehad ertoe gekomen uit het onderwijs naar de educatieve commercie over te stappen.
Deel II telt een drietal afdelingen. De eerste ervan bevat een aantal psychologische, filosofische en pedagogische beschouwingen opvolgend van de hand van Gattegno, van Willy Servais die jarenlang de energieke voorzitter was van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren en

van Emma Castelnuovo, een Italiaanse wiskunde-docente die door leerboeken en door haar didaktiek ook in Nederland bekendheid en waardering geniet.
De tweede afdeling is gewijd aan de mathematische film. Er staan bijdragen in van de Zwitser Nicolet, wiens suggestieve korte films door Leujes en Vredenduin in de 35e jaargang van Euclides werden besproken, van de Engelsman Fletcher, auteur van *Some lessons in Mathematics* die door de samenstelling van enige mathematische films de invoering van dit hulpmiddel in ons onderwijs in belangrijke mate heeft gestimuleerd, van de Fransman Motard en van de cosmopoliet Gattegno.
De derde afdeling tenslotte behandelt diverse concrete hulpmiddelen voor ons wiskunde-onderwijs. Campedelli schrijft een lezenswaardige inleiding, Biguenet geeft informatie over beweegbare modellen, Peckert over het samenstellen en het gebruik van deze modellen. Puig Adam bespreekt handelsmodellen en zelf te maken modellen, Gattegno tenslotte spreekt over divers multivalent materiaal, o.a. de staafjes van Cuisenaire.
Ondanks het feit dat dit boek ook nog aan de wiskundedocent van vandaag veel waardevolle informatie kan verschaffen stelt de verschijning in deze vorm toch teleur. Men vraagt zich af, hoe het mogelijk is, didactisch en commercieel, dat een boek dat in 1958 geacht kon worden up to date te zijn, 13 jaar later vertaald op de markt kan worden gebracht zonder enige aanvulling of correctie. Zelfs een drukfout als die in de naam van de Belgische leraar Bosteels wordt in de vertaling onveranderd overgenomen. Ik vraag me af waarom een lijst van films uit 1958 in 1971 zonder enige aanvulling wordt overgenomen. Heeft de produktie van waardevolle films dan geheel stilgestaan? Leven we niet in een periode waarin overheadprojector en videorecorder een plaats in ons onderwijs gaan innemen?
Gelukkig bevat het boek ook een aantal bijdragen die niet zo tijdgebonden zijn. We noemen als voorbeelden de artikelen van Servais, van Castelnuovo, van Puig Adam, van Campedelli. Gattegno zelf stelt me telkens weer teleur. Hij treedt te sterk op als de man die de problemen opgelost heeft en daarom vertelt hoe het *moet,* waardoor de overtuigingskracht van zijn betoog in het gedrang komt.
Wat de technische kant van deze uitgave betreft: het boek is typografisch uitstekend verzorgd en wordt stevig gebonden in de handel gebracht.

Joh. H. Wansink

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 280-284 (automne 1971-juin 1972)

F. Colmez, De Toulouse à Caen;
C. Frasnay, Axiomatique unitaire et théorie des ensembles.

G. Glaeser, Une petite aventure mathématique;
A. Douady, Le shadock à six becs;
C. Frasnay, Le produit thalésien des scalaires;
M. Glaymann, Une géométrie sur un cube;
M. Thuillière, Les treillis;
J.H. Hlavaty, Nouvelle mathématique moderne aux Etats-Unis;
A. Sorgius, La vie et l'oeuvre de J.H. Lambert;
G. Walusinski, La pédagogie mathématique existe: je l'ai recontrée;
G. Walusinski, Matériaux pour une bibliographie.

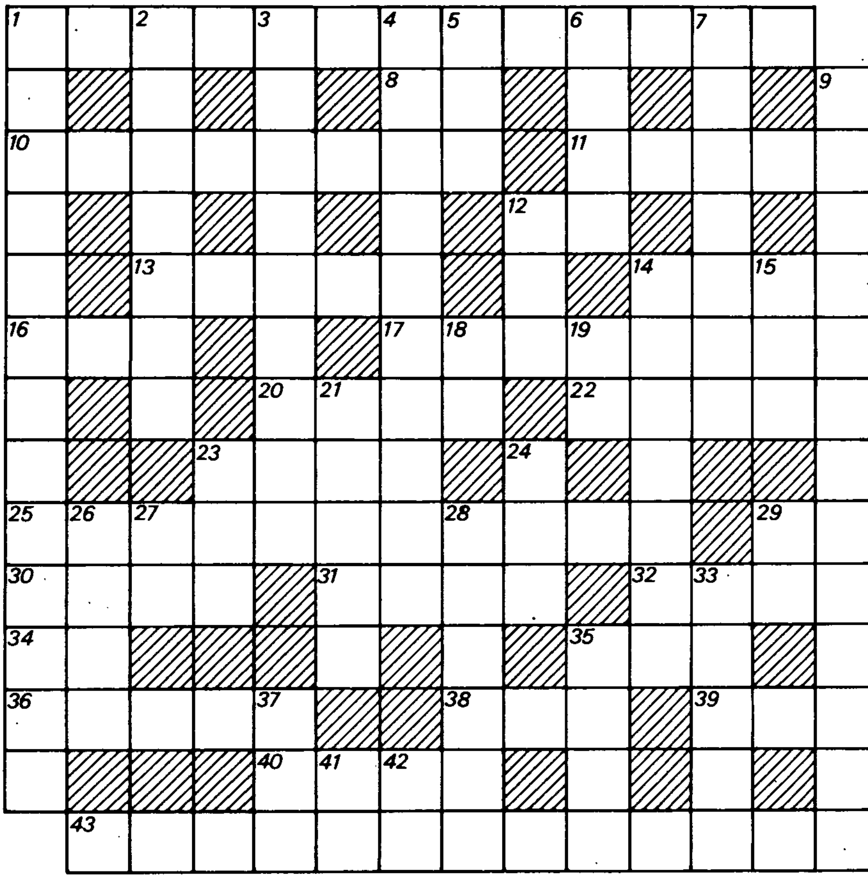
L. Duvert, Comprenons-nous bien;
J.M. Chevallier, Matériaux pour un dictionnaire;
A.M. Bardi, Le naturel a horreur de vide;
G. Brousseau, Processus de mathématisation;
Le Calvez, Agir et prevoir et mathématiser;
Mme Goussiez, Enquête sur l'introduction de la mathématique moderne à l'école élémentaire;

nr. 282 is bijna geheel gewijd aan het wiskundeonderwijs in de basisschool.

M. Dumont, Finalités possibles d'un enseignement mathématique;
D. Barnier, La mathématique dans le premier cycle;
G. Walusinski, Prospérité des réformes et vitalité des critiques;
A. Revuz, La notion de continuité dans l'enseignement du second degré;
S. Turnau, Graphe de démonstration;
M. Berger, Enveloppes de droites;
J.P. Kahané, Pour des cercles de mathématiques;
M. Kister, Parler binaire?
H. Bareil, Mesures, égalités abusives et manuels de sixième;
E. Ehrhart, Une généralisation du problème des rencontres;
G.B. Linkovski, Sur le renforcement de l'inégalité de Bernoulli;
F. Robert, Ah, la recherche! Du temps perdu!
H. Gie, Le concept de 'relativité';
J. Itard, Sur quelques hommes et sur quelques livres.

R. Gauthier, Géométrie métrique et produit scalaire;
G.H. Clopeau, Sur une conception de géométrie;
H. Delavault, Présentation du plan euclidien en troisième;
A. Roumanet, Structures et langage des applications dans le programme de quatrième et troisième;
M. Glaymann, Un exemple de concrétisation;
J.M. Prouveur, Les cartes perforées en classe de sixième;
A. Beaulieu, Lewis Carroll en classe de cinquième;
R. Duval, La nature du raisonnement formel;
P. Buisson, L'enseignement de la géométrie dans le premier cycle;
N. Galtier, Au sujet des méthodes d'enseignement;
J. Bass, Réflexion sur les 'mathématiques modernes'.

Cryptogram



Horizontaal

1. Niet helemaal stuk, maar wel genoeg om – zij het primitief – functies te vinden.
8. Maat voor 51.
10. Computers doen het telkens weer.
11. Vermenigvuldiger.
12. C.
13. Bewijs uit het ongerijmde.
14. O.i. bij eb zeer nodig.
16. Zetel van de aanleg voor wiskunde?
17. En morren, omdat alles in een bepaalde vorm gegoten moet worden.
20. Geschikt om algebra te bedrijven.
22. Steiger.
23. Feest ter ere van een kwadraat.
25. Wispelturig.
29. Verboden maat.
30. Ga er in bij een groot man dan doe je dit optimaal.
31. ++, slecht op een rapport.
32. Bij boksen, trouwen en in de algebra.
34. De voor een mot.
35. Trek hem van achteren naar voren, dan stroomt hij in Afrika.
36. Vlakke.
38. Vlakte, niet te roepen vóór de overkant bereikt is.
39. Nee, dat niet!
40. Van deze wiskundige aan een T.H. een grote ridderorde.
43. In drift 11 aaien geven voor de verandering.

Verticaal

1. Al liggen ze allen met griep, zelfs de tand des tijds brengt ze niet in staat van ontbinding.
2. Heeft een nummermanie voor deelintervallen.
3. Eén is toegestaan in verbeelding en het is ook niets dan verbeelding.
4. L I – R N; weg er mee!
5. 51e algebra.
6. Oxydeert.
7. Een gelijkmatig pak.
9. Ga draaitollen gebruiken om eigenschappen van verzamelingen aan te duiden.
12. Term van de schaal in een 60-tallig stelsel.
14. Pracht van een variant.
15. Vocht in de buurt van de Uithof.
18. Coördinaat op een bol.
19. Maat 1050.
21. Horen bij een passer, een wiskundige en een hoek.
23. Toch een eindige afstand.
24. De laatste tijd probeert een nul hem van de ereplaats te verdringen.
26. Eigenschap van één verzameling en van vele beurzen.
27. Overdreven.
28. Heel merkwaardige kromme.
29. $\wedge$
33. In diagrammen zonder gewicht is een groot land geschetst.
35. Benodigdheid voor het oplossen van vele vraagstukken.
37. Raar getal.
41. D.i. d.i.
42. Origineel van een term van een rij.

De auteur van dit cryptogram wil anoniem blijven. Wij plaatsen zijn bijdrage gaarne. Mag ze vele lezers enige aangename ogenblikken bezorgen. De oplossing in het volgende nummer.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

288 Een vierkant is onderverdeeld in 16 congruente vierkanten. Verdeel het vierkant door een lijn in twee delen die elk acht vierkanten bevatten. De beide delen moeten elk samenhangend zijn. Samenhang in een punt wordt niet toegelaten. Op hoeveel manieren is dit mogelijk? (S.M.P. Book A)

289 Teken vier punten in een plat vlak zo, dat er geen drie afstanden van deze punten alle drie verschillend zijn. (S.M.P. Book A)

Oplossingen

286 Aan een cupduel nemen n clubs deel. Is het aantal deelnemers in een ronde oneven, dan loot één club vrij. De overige spelen twee aan twee en de verliezers vallen af. Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?
Er zijn n clubs. In elke wedstrijd valt er één af. Dus worden er $n - 1$ wedstrijden gespeeld.

287 De getallen 1, 2, . . ., 100 zijn op willekeurige wijze in een rij gerangschikt. De maximale lengte van een stijgende deelrij is p en die van een dalende q. Gevraagd wordt het minimum van $p + q$.
Hier volgt het begin van een willekeurige rangschikking van de getallen met daaronder enkele deelrijen.

14	10	37	45	8	15	41	51	42	40	94	33	57	56	55
14		37	45				51			94				
	10				15	41		42				57		
				8					40				56	
											33			55

De eerste deelrij is gevormd door te beginnen met het eerste getal 14, daarachter te schrijven het eerstvolgend getal dat groter dan 14 is, en zo verder. Het eerste overblijvende getal is 10. Dit kiezen we als begingetal van een tweede rij. Achter 10 plaatsen we het eerste overgebleven getal dat groter dan 10 is en gaan zo verder. Het eerst dan nog overgebleven getal is 8. Met dit getal als eerste vormen we een derde deelrij. Enzovoorts.
Neem nu eens aan, dat $p = 8$. Dat wil zeggen, dat alle gevormde deelrijen een lengte hebben, die hoogstens gelijk aan 8 is. Dan is het aantal gevormde deelrijen minstens 13.
Uit de manier, waarop de deelrijen geconstrueerd zijn, volgt: als a een getal uit de k^e rij is, dan is er in de $k - 1^e$ rij een getal, dat aan a voorafgaat (in de oorspronkelijke rangschikking) en kleiner dan a is.
Omdat er minstens 13 deelrijen zijn geconstrueerd op de voorgeschreven manier, heeft de oorspronkelijke rij in elk geval een dalende deelrij met minstens 13 getallen. En dus is $q \geqslant 13$. Waaruit volgt $p + q \geqslant 21$.
Nemen we aan, dat $p = 6$, dan vinden we op deze manier $p + q \geqslant 6 + 17 = 23$. Het is duidelijk, dat de beste perspectieven geboden wordt door $p = 10$. En dus $p + q \geqslant 20$.
Blijft over de vraag, of $p + q = 20$ zich laat realiseren. Dit is het geval. Kies als rij daartoe

10 20 . . . 100 9 19 . . . 99 8 . . . 92 1 11 . . . 91.

[1] De heer Vredenduin heeft een artikel gewijd aan de S.M.P.-boeken. Het was mijn bedoeling dit artikel in dit nummer van Euclides op te nemen. Tot mijn spijt moet het tot februari blijven liggen. De opgaven 288 en 289 moeten vast de nieuwsgierigheid naar deze schoolboeken opwekken (A.M.K.)

INHOUD